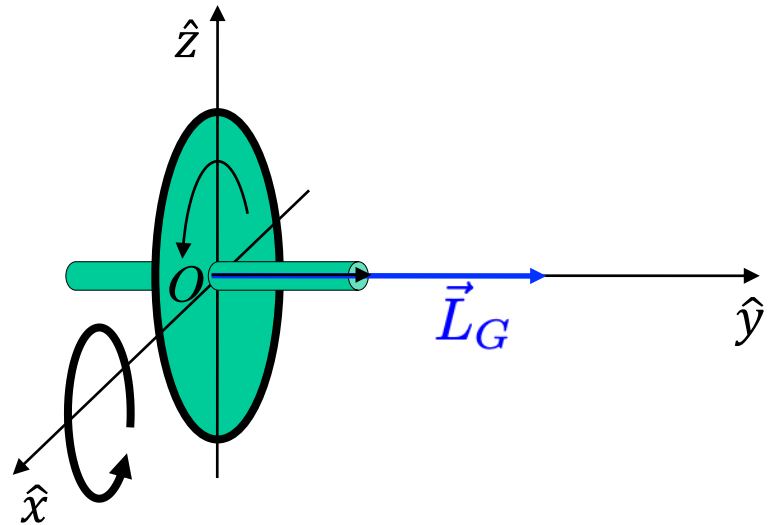
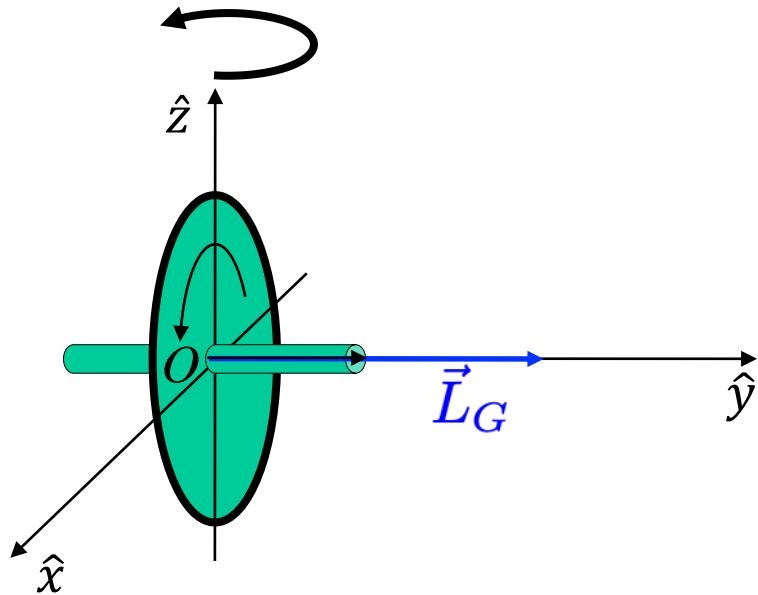


8.2 Ex.:Roue du velo

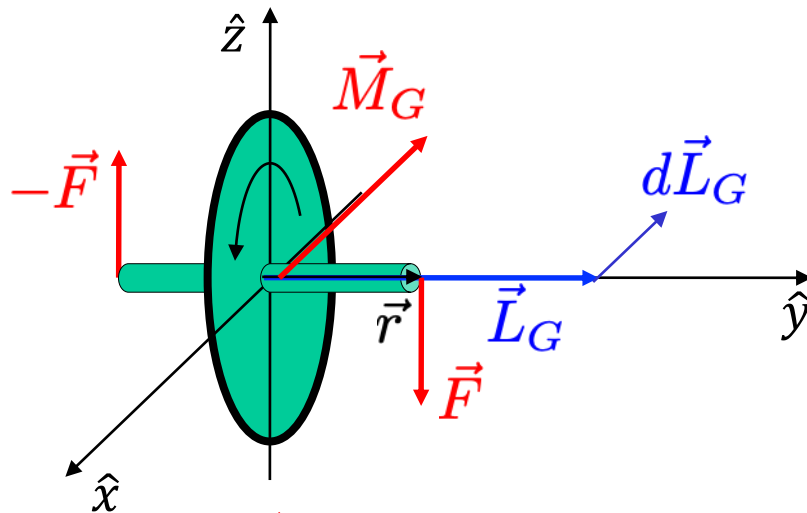
- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$ $\vec{\omega} = \omega \hat{y}$
 - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Oz ? ou de Ox ?



8.2 Ex.: Roue du velo

- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$
 - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Ox ? ou de Oz ?

a) forces F parallèles à z



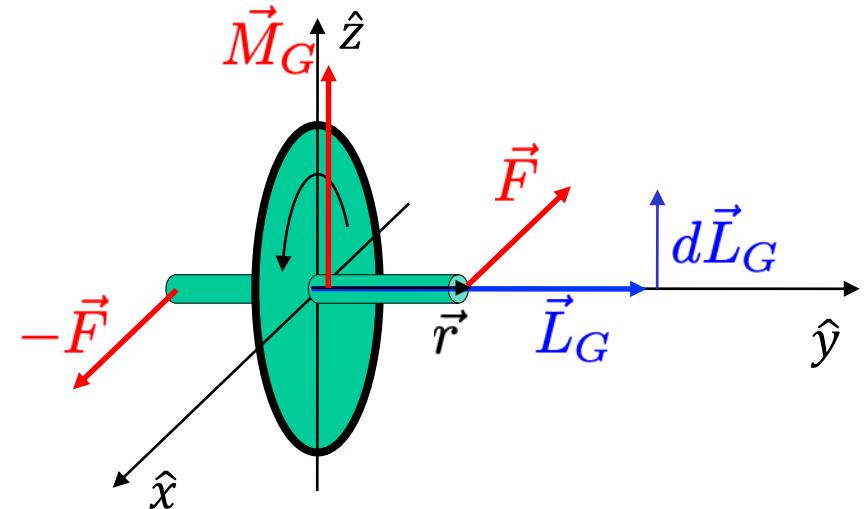
M selon $-\hat{x} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}$ selon $-\hat{x}$

\vec{L}_G tourne dans le plan $\hat{x}\hat{y}$ autour de $O\hat{z}$

Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}} = (\vec{r} \wedge \vec{F}) + (-\vec{r} \wedge -\vec{F}) = 2\vec{r} \wedge \vec{F}$$

b) forces F parallèles à x



M selon $\hat{z} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}$ selon \hat{z}

\vec{L}_G tourne dans le plan $\hat{y}\hat{z}$ autour de $O\hat{x}$

8.3 Moment cinétique d'un solide

Rappel: pour chaque point P du solide

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP} \quad \text{avec } \vec{v}'_P = 0$$

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \overrightarrow{AP_{\alpha}} \wedge m_{\alpha} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_{\alpha}})$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

$$\vec{L}_A = \underbrace{\overrightarrow{AG} \wedge M \vec{v}_A}_{\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}} + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{AP_{\alpha}} \right)^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{AP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega} \right) \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right]$$

= 0 si A = G (centre de masse)

ou si $\vec{v}_A = 0$, donc A = C fixe sur axe de rotation

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega} \right) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

Rappel:

si le solide est « continu », il faut remplacer la somme sur les points matériels par une intégrale sur le volume du solide

$$\begin{cases} m_{\alpha} & \rightarrow dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \\ \sum_{\alpha} & \rightarrow \int_{\text{volume du solide}} \end{cases}$$

$\rho(\vec{r}) = \text{masse volumique}$

8.3 Moment d'inertie par rapport au CM (ou C sur axe de rotation)

- Moment cinétique par rapport à G (ou n'importe quel point C fixe sur l'axe de rotation Δ) :

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

- Faisons une projection sur l'axe de rotation Δ ($\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta}$ parallèle à axe Δ):

$$L_{\Delta} = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 \omega \hat{e}_{\Delta} - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \omega \hat{e}_{\Delta}) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right] \cdot \hat{e}_{\Delta} =$$

$$\omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{GP_{\alpha}})^2 - (\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \hat{e}_{\Delta})^2 \right] = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

L_{Δ} ne dépend de G ou C !

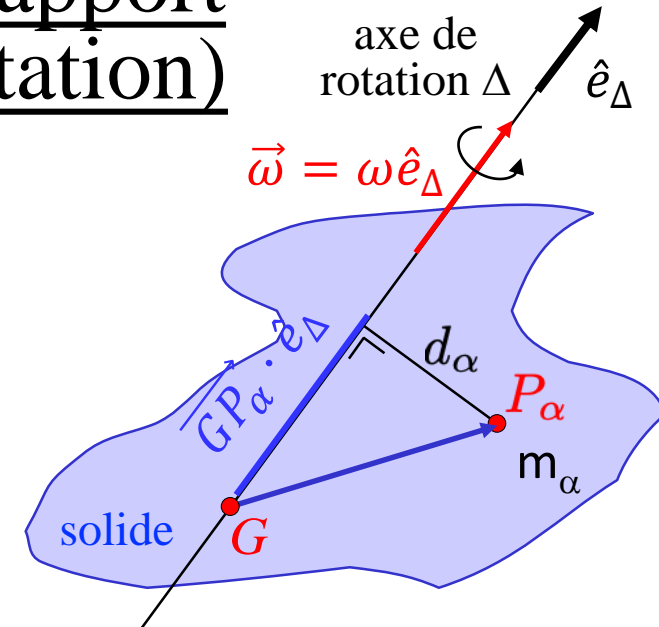
- **Moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ :**

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

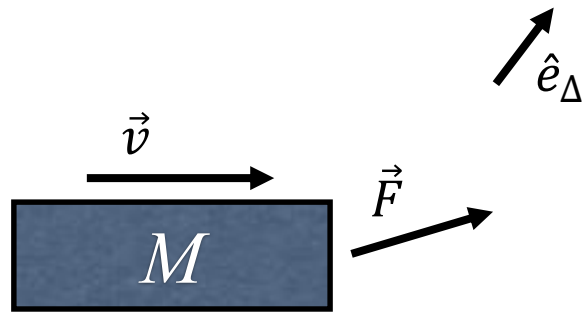
$$L_{\Delta} = I_{\Delta} \omega$$

- Remarques:

- I_{Δ} dépend seulement de la distribution de masse par rapport à l'axe Δ
- En général, \vec{L}_G n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$
- Si Δ est un axe de symétrie du solide et $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta}$, alors \vec{L}_G est parallèle à $\vec{\omega}$



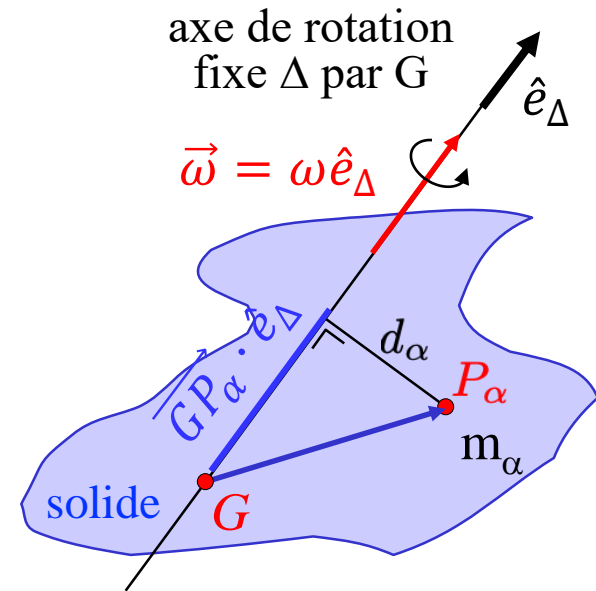
8.3 Masse (d'inertie) et moment d'inertie



2^{ème} loi de Newton

$$\begin{aligned} F_\Delta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\Delta &= M \vec{a}_G \cdot \hat{e}_\Delta = M \frac{d\vec{v}_G \cdot \hat{e}_\Delta}{dt} \\ &= M \frac{dv_{G\Delta}}{dt} \end{aligned}$$

La MASSE (inertielle ou d'inertie)
mesure la résistance (inertie)
qu'oppose le corps à toute accélération
ou à toute modification de l'état de
MOUVEMENT (RECTILIGNE)



$$L_\Delta = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta = \omega \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 = I_{\Delta} \omega$$

$$\begin{aligned} M_{\Delta} = \vec{M}_G \cdot \hat{e}_\Delta &= \frac{d\vec{L}_G}{dt} \cdot \hat{e}_\Delta = \frac{dL_G \cdot \hat{e}_\Delta}{dt} = \frac{dL_{\Delta}}{dt} \\ &= I_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}$$

La MOMENT D'INERTIE mesure
la résistance qu'oppose le corps à
toute modification de l'état de
ROTATION.

8.3 Tenseur d'inertie par rapport au CM

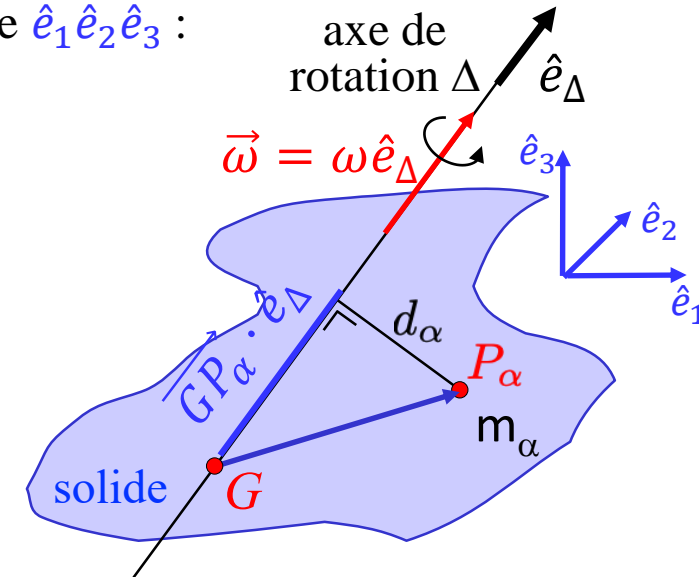
- Moment cinétique par rapport au centre de masse G :

$$\vec{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \vec{\omega} - \left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega} \right) \overrightarrow{GP_{\alpha}} \right]$$

- En coordonnées cartésiennes, dans un repère orthonormé quelconque $\hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_3$:

$$\vec{L}_G = \sum_i L_{G,i} \hat{e}_i \quad \vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\Delta} = \sum_i \omega_i \hat{e}_i$$

$$\begin{aligned} L_{G,i} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \omega_i - \left(\sum_j (GP_{\alpha})_j \omega_j \right) (GP_{\alpha})_i \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \sum_j \delta_{ij} \omega_j - \sum_j (GP_{\alpha})_j \omega_j (GP_{\alpha})_i \right] \\ &= \sum_j \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\left(\overrightarrow{GP_{\alpha}} \right)^2 \delta_{ij} - (GP_{\alpha})_j (GP_{\alpha})_i \right] \omega_j = \sum_j (\tilde{I}_G)_{ij} \omega_j \\ &= (\tilde{I}_G)_{ij} \text{ (élément d'une matrice } 3 \times 3) \end{aligned}$$



- En notation matricielle:

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}$$

- \tilde{I}_G = tenseur d'inertie au centre de masse G

- Matrice symétrique: $I_{Gij} = I_{Gji}$
donc diagonalisable ($I_{Gji} = 0$ si $i \neq j$)

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_{G11} & I_{G12} & I_{G13} \\ I_{G21} & I_{G22} & I_{G23} \\ I_{G31} & I_{G32} & I_{G33} \end{pmatrix}$$

Note: comparaison entre dynamiques de translation et de rotation:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{p} = M\vec{v}_G \\ \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}} & \text{avec } \vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} \end{cases}$$

« le tenseur d'inertie est aux rotations ce que la masse est aux translations »

8.3 Ex. tenseur d'inertie d'une roue

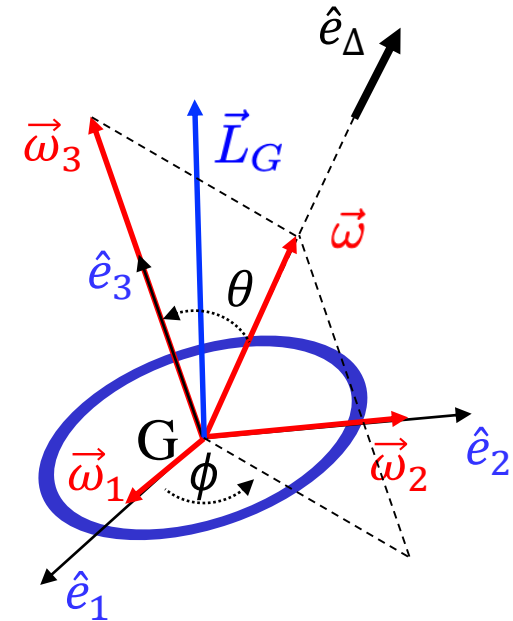
- Roue en rotation autour d'un axe Δ quelconque passant par G .
- Si on choisi le bon repère:

$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} 1/2MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega} =$$

$$\begin{pmatrix} 1/2MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 \end{pmatrix} \cdot \omega \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} =$$

$$MR^2 \omega \begin{pmatrix} 1/2 \sin \theta \cos \phi \\ 1/2 \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



- \vec{L}_G n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$, mais dans le plan défini par $\vec{\omega}$ et l'axe de la roue
- Si la rotation se effectue autour d'un axe de symétrie (I_{G11} , I_{G22} ou I_{G33}) alors \vec{L}_G est parallèle à $\vec{\omega}$. Par ex.: $\hat{e}_\Delta \parallel \hat{e}_3$

8.3 Axes principaux d'inertie

- **Théorème:**

- se démontre en algèbre linéaire

Pour tout point C d'un solide, il est toujours possible de choisir un repère orthonormé au point C tel que la matrice représentant le tenseur d'inertie soit diagonale :

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

- Définitions (au point C):

- Repère d'inertie : repère dans lequel \tilde{I}_C est une matrice diagonale
- Axes principaux d'inertie : axes du repère d'inertie
- Moments d'inertie principaux : moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, c-à-d les éléments diagonaux de \tilde{I}_C dans le repère d'inertie

- Dans le repère d'inertie:

$$\vec{L}_C = \tilde{I}_C \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$$

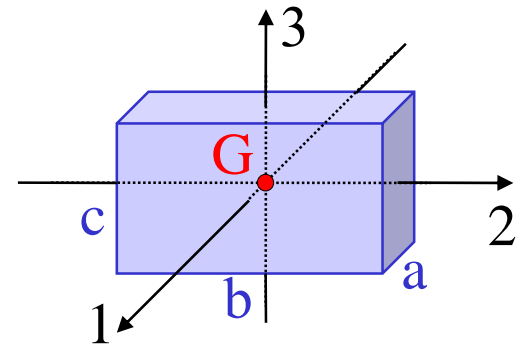
\vec{L}_C n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$

- Rotation autour d'un axe fixe Δ passant par C : Si

$$\vec{L}_C = I_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \Delta \text{ est un axe principal d'inertie}$$

8.3 Cas particuliers simples

Axes et moments d'inertie principaux par rapport au centre de masse G de quelques solides homogènes de masse M



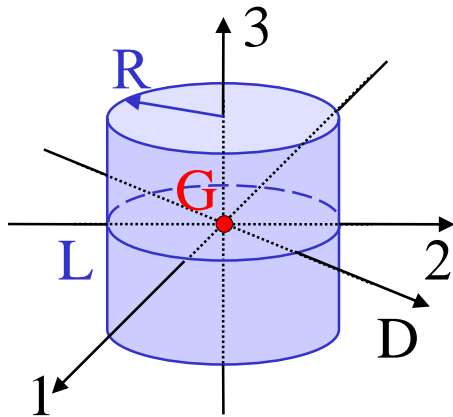
- Parallélépipède rectangle plein :
(plaque rectangulaire si a, b ou $c \rightarrow 0$)

$$I_1 = \frac{1}{12} M (b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \frac{1}{12} M (c^2 + a^2)$$

$$I_3 = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

« toupie asymétrique » :
seulement trois axes
principaux par G



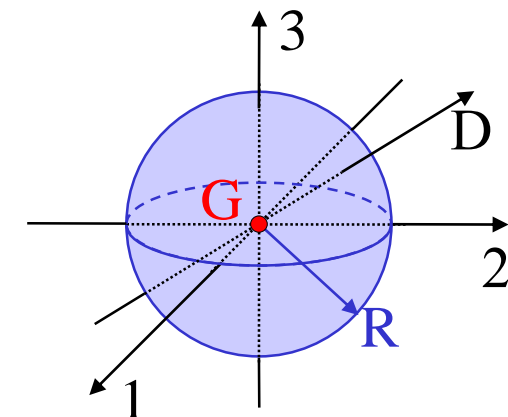
- Cylindre de révolution :
(tige si $R \rightarrow 0$, disque si $L \rightarrow 0$)

plein : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2, \quad I_3 = \frac{1}{2} M R^2$

vide : $I_1 = I_2 = I_\Delta = \frac{1}{2} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2, \quad I_3 = M R^2$

↙ sans masse sur les bases circulaires

« toupie symétrique » :
tout axe Δ par G dans le
plan 12 est principal



- Sphère:

pleine : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{5} M R^2$

vide : $I_1 = I_2 = I_3 = I_\Delta = \frac{2}{3} M R^2$

« toupie sphérique » :
tout axe Δ par G
est principal

8.3 Tenseur d'inertie par rapport à un point A du solide

- Par rapport à un point A appartenant au solide:

$$\vec{L}_A = \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AP_{\alpha}})^2 \vec{\omega} - (\overrightarrow{AP_{\alpha}} \cdot \vec{\omega}) \overrightarrow{AP_{\alpha}} \right] = \vec{AG} \wedge M\vec{v}_A + \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega}$$

$$\tilde{I}_{Aij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\overrightarrow{AP_{\alpha}})^2 \delta_{ij} - (AP_{\alpha})_i (AP_{\alpha})_j \right]$$

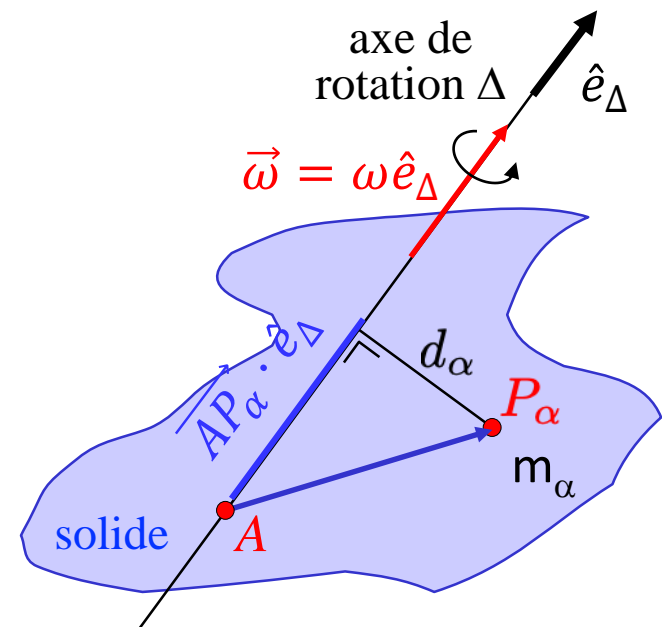
\tilde{I}_A = tenseur d'inertie au point A d'éléments \tilde{I}_{Aij}
Matrice symétrique: $I_{Aij} = I_{Aji}$

$$\tilde{I}_A = \begin{pmatrix} I_{A11} & I_{A12} & I_{A13} \\ I_{A21} & I_{A22} & I_{A23} \\ I_{A31} & I_{A32} & I_{A33} \end{pmatrix} \neq \tilde{I}_G$$

- Si A est un point sur l'axe de rotation Δ :

$$L_{\Delta} = \vec{L}_A \cdot \hat{e}_{\Delta} = \tilde{I}_A \cdot \vec{\omega} \cdot \hat{e}_{\Delta} = \omega \tilde{I}_A \cdot \hat{e}_{\Delta} \cdot \hat{e}_{\Delta} = \omega I_{\Delta}$$

$$I_{\Delta} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$



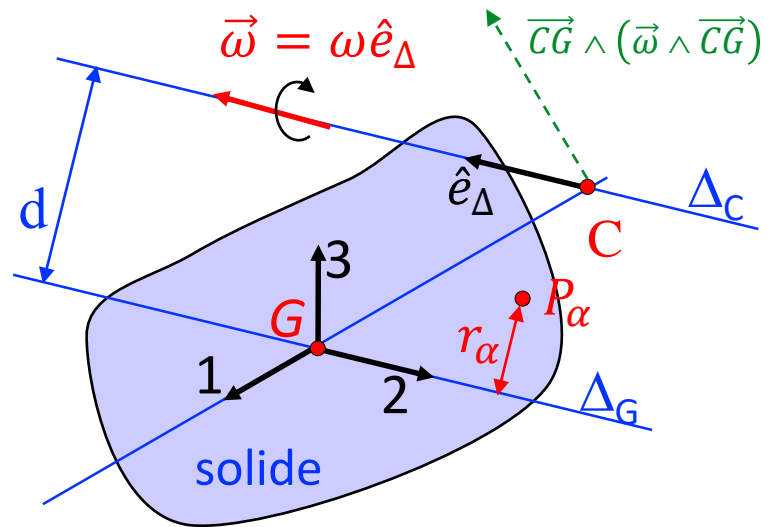
8.3 Formule de Steiner

Relation entre le moment d'inertie par rapport à un axe donné par C (Δ_C) et le moment d'inertie par rapport à un axe de même direction mais passant par le centre de masse G (Δ_G):

$$L_\Delta = \vec{L}_C \cdot \hat{e}_\Delta = I_{\Delta_C} \omega$$

1^{er} théorème de König:

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{v}_G$$



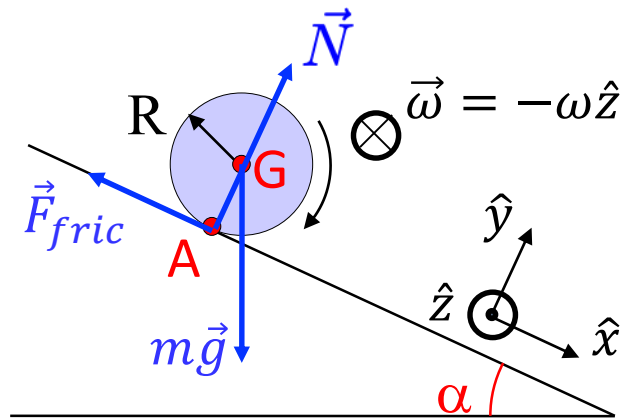
$$\begin{aligned} L_\Delta &= \vec{L}_C \cdot \hat{e}_\Delta = \vec{L}_G \cdot \hat{e}_\Delta + m \overrightarrow{CG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CG}) \cdot \hat{e}_\Delta = I_{\Delta_G} \omega + m \omega d^2 \\ &= \omega (I_{\Delta_G} + m d^2) \end{aligned}$$

$$I_{\Delta_C} = I_{\Delta_G} + m d^2$$

Formule de Steiner

Théorème de Steiner: généralisation de la formule de Steiner permettant de calculer le tenseur d'inertie au point C quelconque d'un solide connaissant celui au centre de masse G

8.3 Ex.: Roulement sans glissement sur plan incliné



Cylindre plein roulant sans glisser: $v_A = 0$

Indiquer les forces externes agissantes sur le system

- Le centre de masse G est sur l'axe du cylindre: $v_G = \omega R$
- Théorème du centre de masse

$$m\vec{a}_G = \vec{F}_{fric} + \vec{N} + m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg \sin \alpha - F_{fric} \\ 0 = N - mg \cos \alpha \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Le système d'équations n'est pas suffisante pour résoudre le problème
- Théorème du moment cinétique

Appliqué en G

$$\vec{L}_G = I_{Gz} \vec{\omega} = \frac{1}{2} m R^2 \vec{\omega} = -\frac{1}{2} m R v_G \hat{z}$$

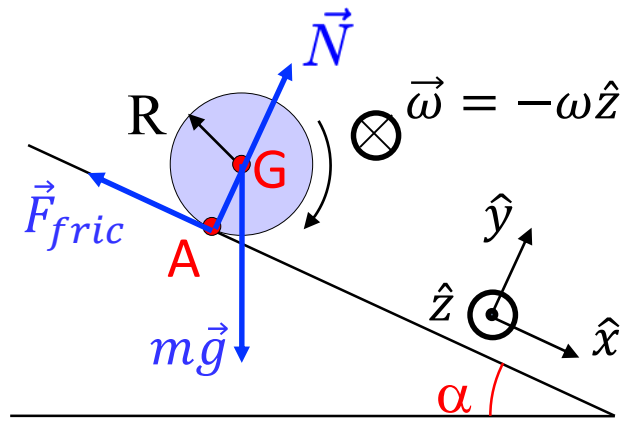
$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{1}{2} m R a_G = -R F_{fric} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{1}{2} m a_G = F_{fric} \end{cases}$$

$$a_G = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

$$F_{fric} = \frac{1}{3} m g \sin \alpha$$

$$N = m g \cos \alpha$$

8.3 Ex.: Roulement sans glissement sur plan incliné



Cylindre plein roulant sans glisser: $v_A = 0$

Indiquer les forces externes agissantes sur le system

- Le centre de masse G est sur l'axe du cylindre: $v_G = \omega R$
- Théorème du centre de masse

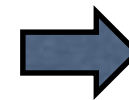
$$m\vec{a}_G = \vec{F}_{fric} + \vec{N} + m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} ma_G = mg \sin \alpha - F_{fric} \\ 0 = N - mg \cos \alpha \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- Le système d'équations n'est pas suffisante pour résoudre le problème
- Théorème du moment cinétique

Appliqué en A

$$\vec{L}_A = I_A \vec{\omega} \quad I_A = I_{GZ} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \quad (\text{Formule de Steiner})$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -\frac{3}{2}mRa_G = -Rmg \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \frac{3}{2}a_G = g \sin \alpha \end{cases}$$



$$a_G = \frac{2}{3}g \sin \alpha$$

$$F_{fric} = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$$

$$N = mg \cos \alpha$$

8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

• Description et hypothèses :

- Meule: disque mince de masse m , rayon R , centre de masse G
- Axe de la meule CG : horizontal, sans masse, longueur d
- Roulement sans glissement sur le sol (friction très petites pour simplifier), et point C fixe sur un axe vertical
- $\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho$ rotation propre de la meule, $\vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z$ rotation autour de l'axe vertical

N.B.: pour chaque couple de points P, A d'un solide

$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \vec{AP}) = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{tot} \wedge \vec{AP}$$

• Vecteur instantané de rotation total = $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$

$$\begin{cases} \vec{0} = \vec{v}_A = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GA} \\ \vec{0} = \vec{v}_C = \vec{v}_G + (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GC} \end{cases}$$



$$\Rightarrow (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GA} = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{GC}$$

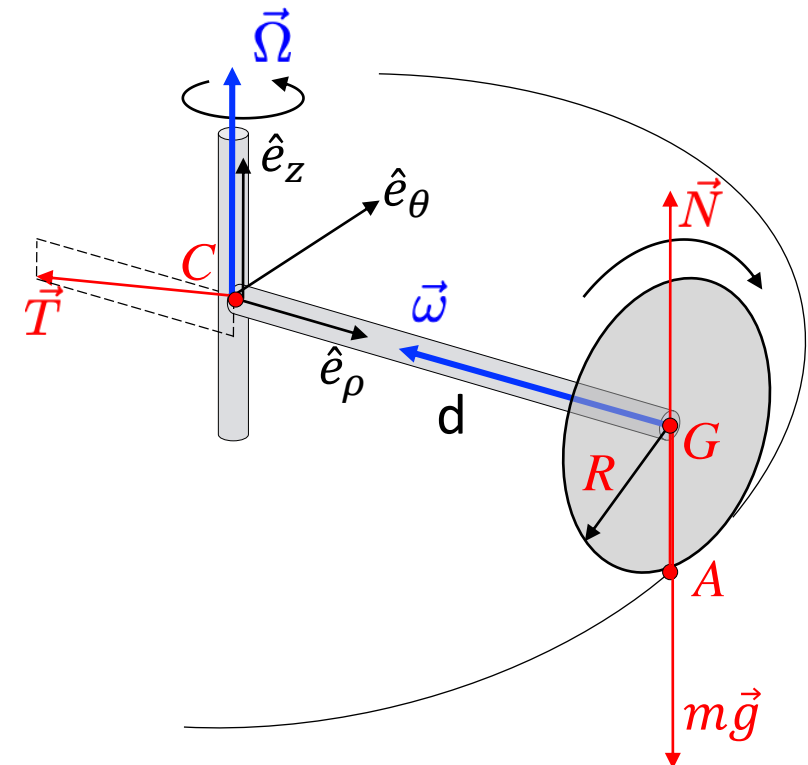
$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{GA} = \vec{\Omega} \wedge \vec{GC}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega R = \Omega d}$$

$$\vec{v}_G = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{CG} = \Omega d \hat{e}_\theta$$

$$\vec{a}_G = \Omega d \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \Omega d \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_\theta = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

$$\vec{\omega} \parallel \vec{GC} \Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{GC} = 0 \quad \vec{\Omega} \parallel \vec{GA} \Rightarrow \vec{\Omega} \wedge \vec{GA} = 0$$



8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho, \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z, \omega R = \Omega d, \vec{a}_G = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

- Equations du mouvement :

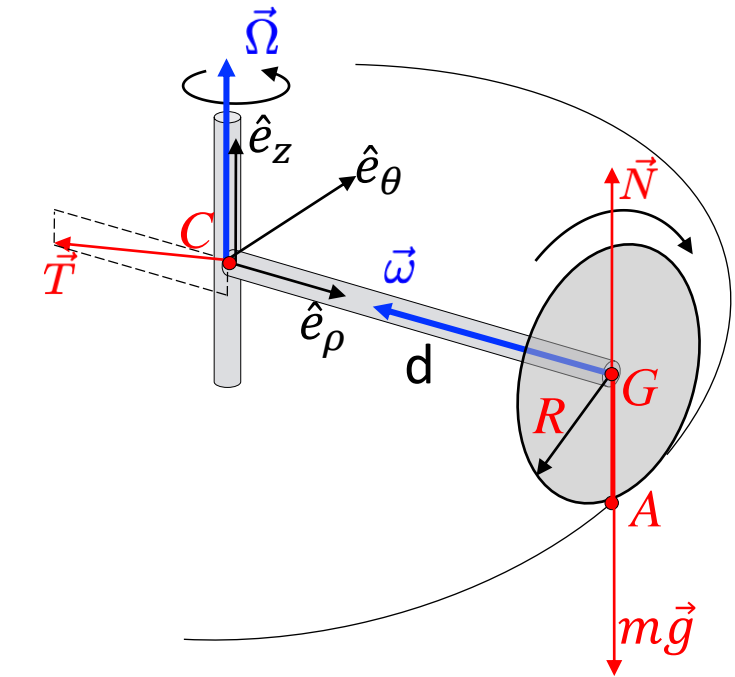
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -m\Omega^2 d = T_\rho \\ 0 = T_\theta \\ 0 = T_z + N - mg \end{cases}$$

- Théorème du moment cinétique

$$\vec{T} \text{ est non connu} \Rightarrow \text{application en C} \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

$$\tilde{I}_C = \begin{pmatrix} 1/2mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4mR^2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{pmatrix} \quad (\text{Formule de Steiner; } I_{C11} = I_{G11})$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \tilde{I}_C \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{I}_C)_{11} \vec{\omega} + (\tilde{I}_C)_{33} \vec{\Omega} \\ &= -\frac{1}{2}mR^2\omega \hat{e}_\rho + \left(\frac{1}{4}mR^2 + md^2\right)\Omega \hat{e}_z \end{aligned}$$



$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \vec{CG} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\hat{e}_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_\rho = -\frac{1}{2}mR^2\omega \Omega \hat{e}_\theta$$

8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho, \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z, \omega R = \Omega d, \vec{a}_G = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

• Equations du mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}_G = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -m\Omega^2 d = T_\rho \\ 0 = T_\theta \\ 0 = T_z + N - mg \end{cases}$$

- Théorème du moment cinétique

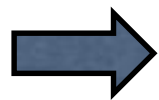
$$\vec{T} \text{ est non connu} \Rightarrow \text{application en C} \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega\Omega\hat{e}_\theta$$

$$\vec{M}_C^{ext} = \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{CA} \wedge \vec{N} = d\,mg\,\hat{e}_\theta + \overrightarrow{CG} \wedge \vec{N} + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{N} = d\,mg\,\hat{e}_\theta - dN\hat{e}_\theta$$

$$-\frac{1}{2}mR^2\omega\Omega\hat{e}_\theta = d\,mg\,\hat{e}_\theta - dN\hat{e}_\theta$$

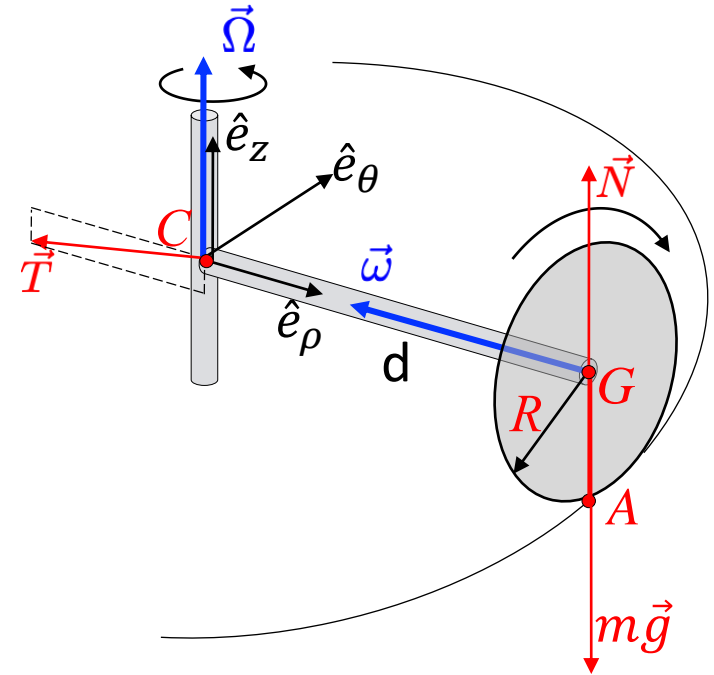
$$\omega R = \Omega d$$



$$-\frac{1}{2}mRd\Omega^2 = d\,mg - dN$$



$$N = mg + \frac{1}{2}mR\Omega^2$$



8.3 Ex.: Meule tournante à vitesse constante

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_\rho, \vec{\Omega} = \Omega \hat{e}_z, \omega R = \Omega d, \vec{a}_G = -d\Omega^2 \hat{e}_\rho \quad \vec{v}_G = (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \vec{CG}$$

- Théorème du moment cinétique

$$\vec{T} \text{ est non connu} \Rightarrow \text{application en C} \quad \frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C^{ext}$$

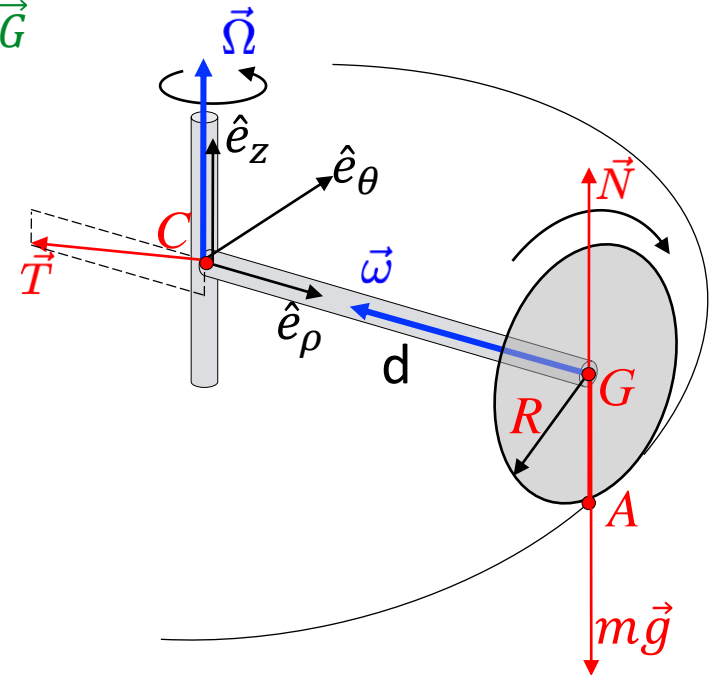
$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + \vec{CG} \wedge m\vec{v}_G \quad (1^{\text{er}} \text{ théorème de König})$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= \vec{L}_G + \vec{CG} \wedge m\vec{v}_G = \vec{L}_G + d\hat{e}_\rho \wedge md\Omega\hat{e}_\theta = \\ &= \vec{L}_G + md^2\Omega\hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G &= \tilde{I}_G \cdot (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) = (\tilde{I}_G)_{11}\vec{\omega} + (\tilde{I}_G)_{33}\vec{\Omega} \\ &= -\frac{1}{2}mR^2\omega\hat{e}_\rho + \frac{1}{4}mR^2\Omega\hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\vec{L}_C = \vec{L}_G + md^2\Omega\hat{e}_z = -\frac{1}{2}mR^2\omega\hat{e}_\rho + \frac{1}{4}mR^2\Omega\hat{e}_z + md^2\Omega\hat{e}_z = -\frac{1}{2}mR^2\omega\hat{e}_\rho + \left(\frac{1}{4}mR^2 + md^2\right)\Omega\hat{e}_z$$

$$\frac{d\hat{e}_z}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_C}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\omega (\vec{\omega} + \vec{\Omega}) \wedge \hat{e}_\rho = -\frac{1}{2}mR^2\omega \Omega \hat{e}_\theta$$



$$\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} 1/2mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4mR^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \quad \vec{CG} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$